徑向發散流場移流-延散方程之全解析解模式

陳緯愷 [1], 陳瑞昇 [1]

[1]應用地質研究所, 國立中央大學

前言

地下水污染是全球關注的重要議題，地下水中汙染物傳輸分析通常發生在涉及由抽取(注入)井所形成的徑向收斂(發散)流場中的情況下，特別是在進行與井相關的地下水污染調查、預防與整治方案時。由於多口井產生的流場極為複雜，因此將透過單口井所形成的徑向流場來模擬地下水汙染的傳輸過程。

動機

- 地下水汙染傳輸模式之建立通常採用移流-延散方程式(advection-dispersion equation;簡稱ADE)來描述地下水中溶質傳輸情況，結合圓柱座標系統可以用於了解徑向移流-延散傳輸行為與機制。
- 非均勻流場中溶質傳輸的解析解是複雜且困難的，因為流場隨者空間變化 (Lin., 2016)。而經由注入(抽水)井所形成的穩定收斂(發散)徑向流場可視為最簡單的非均勻流場系統。

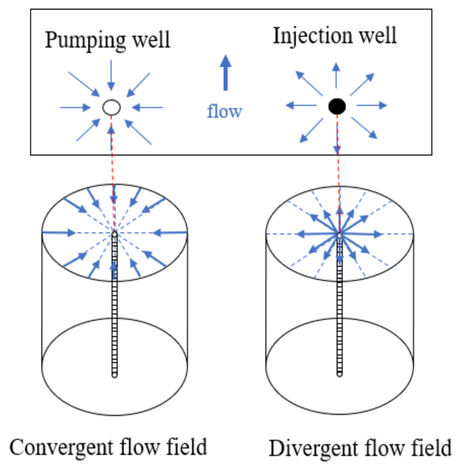

圖1. 收斂與發散徑向流場示意圖

- 徑向流場中溶質傳輸的解析解在許多實際應用中起到重要的作用，涉及發散/收斂流動示踪試驗之傳輸研究、含水層儲存回抽研究、地熱儲層中的熱傳輸研究。

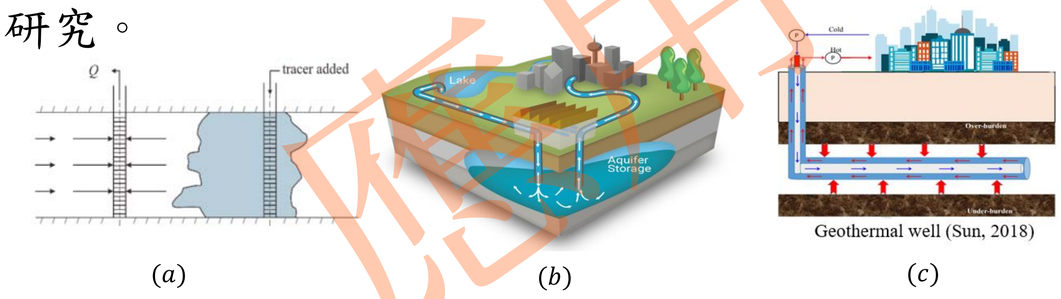

圖2. (a)收斂示踪劑試驗 (b)含水層儲存回抽研究 (c)地熱儲層中的熱傳輸研究

- 過去研究發展了徑向移流-延散溶質傳輸問題之解析解，但大多數模式都是使用*Laplace*數值逆轉換來求得出半解析解。然而*Laplace*數值逆轉換是一個不適定問題（ill-posed problem），容易受到初始條件或參數變化而產生數值誤差，且沒有一種通用的方法可以很好地解決所有溶質傳輸問題。

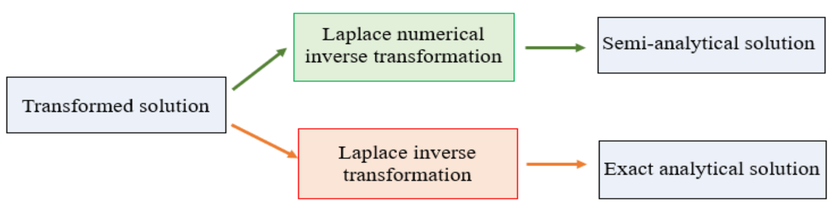

圖3. 解析解模式之求解流程

- 對於徑向移流-延散傳輸問題，很難使用*Laplace*逆轉換來求得全解析解(Wang and Zhan., 2015) 。

目的

發展了徑向發散流場中移流-延散溶質傳輸問題的全解析解模式，不需要透過*Laplace*數值逆轉換即可求得原時域中的解，避免了 *Laplace* 數值逆轉換造成的誤差。

數學模式

- 控制方程式與邊界條件:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rD(r)\frac{\partial C(r,t)}{\partial r} - v(r)\frac{\partial C(r,t)}{\partial r}\right] = R\frac{\partial C(r,t)}{\partial t}, r_w \le r \le r_L, t > 0$$

$$D(r) = \alpha v(r) \qquad v(r) = \frac{Q}{2\pi b\phi r}$$

$$C(r,t) = 0$$

$$C(r = r_w, t) = f(t)$$

$$f(t) = \begin{cases} C_0 \\ C_0(1+\sin(t)) \\ C_0\delta(t) \end{cases}$$

$$\frac{\partial C(r = r_L, t)}{\partial t} = 0$$

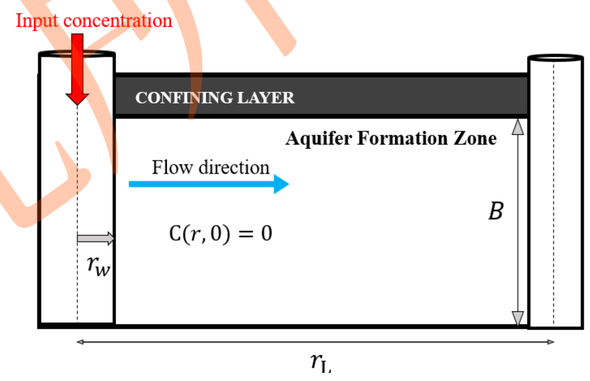

圖4. 一維徑向發散流場概念模型

結果與討論

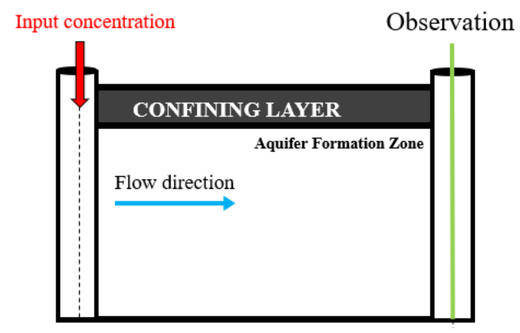

圖5.一維徑向發散流場驗證模型

表1. 驗證參數

Parameters	Values
Well radial , r_w [L]	0.1
Total length, r_L [L]	25
Aquifer thickness, b[L]	10
Initial concentration, $C_0[ML^{-3}]$	40
Radial dispersivity, α[L]	**25/5/2.5**
Effective porosity, ϕ[-]	0.2
Retardation coefficient, R[-]	1
Constant injection rate, Q[L^3T^{-1}]	2
Peclet number	1/5/10
Observation distance, r_0 [L]	25

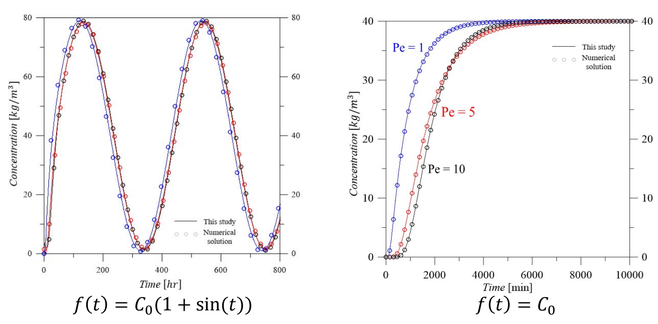

圖6. 本研究與數值模式之不同延散度和邊界條件下濃度穿透曲線比較驗證

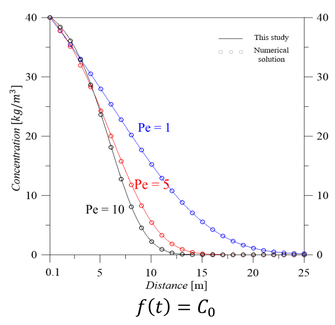

圖7.本研究與數值模式之不同延散度下濃度分布剖面圖比較 $t = 100\ [min]$

表2. 敏感性測試參數

Parameters	Values
Well radial , r_w [L]	0.1
Total length, r_L [L]	25
Aquifer thickness, b[L]	10
Initial concentration, $C_0[ML^{-3}]$	40
Radial dispersivity, α[L]	25
Effective porosity, ϕ[-]	0.2
Retardation coefficient, R[-]	1/5/10
Constant injection rate, Q[L^3T^{-1}]	2
Peclet number	1
Observation distance, r_0 [L]	25

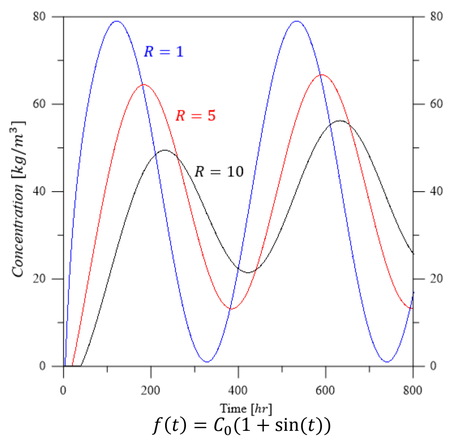

圖8. 不同遲滯因子於徑向發散流場之濃度穿透曲線比較

結論

本研究發展了徑向發散流場中移流-延散溶質傳輸問題的全解析解模式，通過對發散流示蹤劑試驗中溶質傳輸問題的解析求解，驗證了本研究所發展出的解析解模式的準確性。並且與*Laplace*轉換有限差分之數值模式的結果進行比較，考慮不同延散度 (25、5、2.5)，比較結果顯示相當吻合。

應用地質研究所